Philosophia Scientiæ
Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

20-2 | 2016
Circulations et échanges dans l'espace euro-méditerranéen (XVIIIe-XXIe siècles)

Les frontières entre la logique et les mathématiques : le point de vue de Gilles-Gaston Granger

Nada Feghaly

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/1191
DOI : 10.4000/philosophiascientiae.1191
ISSN : 1775-4283

Éditeur
Éditions Kimé

Édition imprimée
Date de publication : 27 mai 2016
Pagination : 159-175
ISBN : 978-2-84174-751-1
ISSN : 1281-2463

Les frontières entre la logique et les mathématiques : le point de vue de Gilles-Gaston Granger

Nada Feghaly
Aix Marseille Université, CNRS, CEPERC
UMR 7304, Aix-en- Provence (France)

Résumé: Selon Gilles-Gaston Granger, la différence entre la logique et les mathématiques est une différence de degré. De la logique des propositions aux mathématiques en passant par le calcul des prédicats et le reste des calculs logiques, la forme perd en pureté et le contenu gagne progressivement en épaisseur. Du degré zéro de l'opposition d'une forme à un contenu au niveau de la logique propositionnelle aux formes logico-mathématiques productrices de « contenus formels », le calcul s'enrichit en propriétés d'individuation au détriment de ses propriétés méta-logiques. Granger ne prétend pas avoir fondé par là un véritable critère de logicité. Toujours est-il qu'il part d'un nombre de présupposés explicitement établis lui servant de point d'appui pour démarquer la logique des mathématiques. En revenant sur ces présupposés, nous voudrions montrer, comme l'a reconnu Pascal Engel précédemment, qu'ils ne sont pas exempts d'ambiguïtés, tant par leurs ramifications philosophiques que par les difficultés techniques qu'ils suscitent. Néanmoins, et à la différence d'Engel, nous n'irons pas jusqu'à dire que la conception grangérienne constitue, malgré ses ambiguïtés, un critère de logicité.

Abstract: According to Gilles-Gaston Granger, the difference between logic and mathematics is a difference of degree. From propositional logic to mathematics through predicate and other logical calculations, the form loses in purity and the content increases gradually in thickness. From zero-degree of opposition of a form to a content at the level of propositional logic to the logical-mathematics forms producing "formal content", the calculation is enriched with individuation properties to the detriment of its metalogical properties. By saying so, Granger does not claim to have found a true criterion of logicity. The fact remains that he takes a number of presuppositions explicitly established as a cornerstone to demarcate the logic of mathematics.

Philosophia Scientiæ, 20(2), 2016, 159–175.

By considering these presuppositions, we want our aim was to show, as Pascal Engel previously recognized previously bynoted Pascal Engel, that they are not free of ambiguity both in their philosophical ramifications and in the technical difficulties they create. However, and unlike Engel, we will not go as far as to say that the Grangerian Conception, despite its ambiguities, is a criterion of logicity.

1 Introduction

Dans son article « Il n'y a pas d'objets logiques » de 1995, Pascal Engel considère que la conception logique de Granger est d'une telle « originalité » qu'elle mérite d'être proprement nommée « critère de Granger » [Engel 1995]. Cette conception consiste à dire qu'en logique propositionnelle, il y a une transparence parfaite entre le système des *opérations* et celui des *objets*. La transparence se traduit au niveau du calcul par les trois méta-propriétés suivantes : la non-contradiction, la complétude et la décidabilité[1]. Lorsque Engel s'interroge sur la validité de ce « critère », il trouve que « pour l'essentiel il l'est, mais qu'il contient certaines ambiguïtés, et que la conception de la logique sur laquelle il repose n'est pas assez spécifique pour nous permettre de répondre à certaines des questions fondamentales de la philosophie de la logique » [Engel 1995, 123].

Nous engageons la présente discussion afin de savoir si la conception de Granger constitue un vrai critère de logicité. Pour y répondre, nous analysons le point de vue grangérien sur trois niveaux : méta-théorique (1), philosophique (2) et technique (3). Dans la partie traitant du problème sémantique (4), nous essayons de montrer pourquoi les propositions philosophiques d'Engel, cherchant à renforcer le versant sémantique ou ontologique de la position de Granger, nous paraissent inappropriées. Nous tirons, au terme de ces réflexions, la conclusion suivante : la conception grangérienne, interprétée en tant que critère logique, ne peut résister à la réfutation. Ce constat ne devrait rien enlever à la pertinence de la notion de contenu formel soustraite, dans le contexte de notre analyse, à ses applications philosophiques. Il montre tout au plus qu'elle échoue en tant que notion technique fondatrice d'un critère de démarcation entre la logique et les mathématiques.

1. La non-contradiction signifie qu'un système ne peut pas contenir à la fois une proposition et sa négation ; la complétude veut dire que toute proposition vraie doit pouvoir être formellement déduite à l'intérieur du système, c'est-à-dire à partir des axiomes ; la décidabilité, quant à elle, se traduit par l'existence d'un algorithme pouvant décider de la vérité des propositions.

2 Le choix des méta-propriétés

La pure coïncidence de l'objet et de l'opération, dit Granger, rend impossible la différenciation d'une forme et d'un contenu au niveau de la logique propositionnelle, empêchant naturellement l'apparition des *contenus formels*. Ceux-ci sont engendrés chaque fois que « l'objectal déborde l'opératoire » [Granger 1987, 206], c'est-à-dire, chaque fois qu'un objet formel, logique ou mathématique, n'est plus dominé par le système des règles axiomatiques qui l'a originairement produit. La transparence n'est donc pas une propriété commune à tout objet formel, puisqu'elle se perd au fur et à mesure que l'objet gagne en épaisseur. Quand les contenus formels viennent enrichir l'objet originaire, vide au niveau de la logique propositionnelle, on quitte le domaine du logique pur : la transparence entre le système des objets et le système des opérations s'atténue et les méta-propriétés se perdent successivement. Tel est le cas des mathématiques[2], mais aussi, à un niveau plus abstrait, celui de la logique des prédicats du premier ordre. En distinguant deux modes d'être des objets, l'objet « individu » et l'objet « propriété », la logique des prédicats perd la décidabilité du système.

L'interprétation proposée par Engel dans l'article de 1995 s'ouvre sur le constat suivant : on ne peut, dit-il, considérer le critère de Granger comme un véritable critère de logicité que si la coupure entre le calcul des propositions et les autres calculs logiques, à commencer par le calcul des prédicats, est tenue pour une « coupure radicale ». Il est vrai que, sur ce point précis, la position de Granger manque de résolution puisqu'il réserve à la logique propositionnelle le statut d'une logique au sens strict du terme, sans trancher en contrepartie le statut du calcul des prédicats. En 1979, époque de *Langages et épistémologie*, Granger considérait le calcul des prédicats comme un calcul mathématique :

> Le passage aux mathématiques [...] a lieu dès que le symbolisme ne peut être interprété que comme théorie de certaines espèces d'objets abstraits, plus ou moins quelconques, mais non comme théorie d'un discours. Le calcul des prédicats lui-même appartiendrait déjà à cette sphère mathématique, puisqu'il est la théorie générale des propriétés des objets *d'un monde*. [Granger 1979, 66]

Plus tard, en 1987, ses propos, légèrement nuancés, semblent accorder à ce calcul un statut logique :

> Si l'on ne peut se résoudre à rejeter hors de la logique le calcul des prédicats, on pourra, sans trop s'écarter de notre point de vue, arguer du maintien de la non-contradiction et de la complétude en ce calcul, qui traduit jusqu'à un certain point la

2. Nous savons depuis l'élaboration des théorèmes de limitation de Gödel qu'il existe des théories arithmétiques incomplètes, c'est-à-dire qu'elles comportent des énoncés vrais, mais que l'on ne pourra jamais démontrer à l'aide des seuls axiomes de la théorie.

> domination de l'opératoire. Domination impuissante, toutefois, et seulement virtuelle, puisqu'est alors perdue la décidabilité effective. Nous accepterions néanmoins cette solution modérée, réservant alors la qualification d'« analytique » pour le noyau dur du logique, formulé dans le calcul classique des propositions. [Granger 1987, 204]

Et ce n'est que dans « Is Logic a Theory of Object Überhaupt ? » qu'apparaît l'expression « proto-mathématique » [Granger 1994, 79] qui légitime en quelque sorte la possibilité d'attribuer au calcul des prédicats un double statut, mi-logique/ mi-mathématique. Ce double statut, il faut le dire, ne fait sens qu'au sein de la conception qu'a Granger de l'objet formel, objet susceptible de s'enrichir *par degrés*. Entre la logique et les mathématiques, il n'est donc nullement question d'un écart « radical » comme le suppose Engel, mais d'une frontière « arbitraire » comme l'explique Granger lui-même.

> Il est assurément permis de considérer la frontière entre logique et mathématique comme arbitraire, puisque l'on ne quitte pas alors le domaine d'objets purement formels, c'est-à-dire définissables et constructibles *à la rigueur* sans apport empirique. [Granger 2001, 103]

Quoiqu'elles apparaissent ici comme deux disciplines complémentaires, la logique et les mathématiques sont effectivement distinguées en fonction de leurs propriétés méta-théoriques[3]. Peut-être est-ce ce qui a poussé Engel à interpréter la coupure qui les sépare comme radicale, si l'on veut, dit-il, privilégier un critère du logique, non seulement du formel en général. Pourtant, dans *La Norme du vrai*, texte précédent de 1989, Engel pensait que le critère de Granger serait « plus approprié » si nous l'interprétions comme un « critère des degrés du formel » [Engel 1989, 305], plutôt qu'un critère de distinction stricte entre la logique et les mathématiques. Était notamment soulignée l'idée suivante : l'enjeu du critère grangérien est d'éliminer de la logique propositionnelle « toute considération ontologique et toute notion sémantique, à l'exception du vrai et du faux, comme propriétés des propositions » [Engel 1989, 302]. Parce que les objets dont traite cette logique ne sont pas des objets d'un monde, ils sont neutres ontologiquement. Parce qu'ils sont les produits d'un système d'opérations qui ne comporte pas d'appareil référentiel, ils sont vides sémantiquement.

Ces deux considérations expliquent selon Engel l'échelle méta-théorique établie par Granger. Entre la décidabilité et la complétude, Granger pouvait

3. Granger explique que « la richesse de plus en plus marquée des contenus a pour conséquence, [...] des méta-propriétés qui semblent faire échapper de plus en plus fortement les systèmes successifs d'objets à l'emprise totale des opérations d'une pensée démonstrative. Nous proposons donc de faire commencer la mathématique, après le système formel logique élargi du calcul des prédicats, qui a perdu la *décidabilité*, avec ceux qui ont perdu la *complétude* » [Granger 2001, 103].

par exemple privilégier la deuxième, et en conséquence, sauvegarder sans la moindre hésitation le statut logique du calcul des prédicats. Après tout, la plupart des penseurs qui ont proposé de démarquer la logique par ses propriétés méta-théoriques, dont Kneale, qu'on peut citer ici à titre d'exemple, préfèrent employer le critère de la complétude. Dans ce cas, la coupure qui marque le domaine de la logique se trouve entre le calcul des prédicats du premier ordre et les calculs d'ordre supérieur. D'autres critères ont été également proposés, tel le théorème de Löwenheim-Skolem utilisé par Quine ou encore le théorème de Lindström, et tous ces théorèmes montrent que le calcul des prédicats du premier ordre est un calcul logique à part entière. Si Granger choisit la décidabilité comme la méta-propriété limitative en rejetant le calcul des prédicats en dehors du « noyau dur du logique » [Granger 1987, 204], son choix, comme le souligne Engel et comme nous voudrions ici plus largement l'expliciter, semble être motivé par des raisons non pas techniques mais principalement philosophiques.

3 Sur les présupposés philosophiques

Le plan opératoire – traduit par la perte de la décidabilité – n'est pas à vrai dire l'élément décisif qui sépare la logique des mathématiques. Si l'on suit de près son argumentation, on voit que le domaine de la logique s'arrête là où *l'ombre d'objet s'individualise*, donc là où s'introduit le plan *ontologique*. Dans *Sciences et réalité*, il est dit :

> [...] l'opposition même individu-prédicat (qui) est bien un trait d'ontologie, absent de l'objet nu d'une logique des propositions. C'est en raison de ce premier enrichissement de l'objet logique par rapport à la quasi-vacuité ontologique de celui de la logique des propositions que nous proposions jadis de réserver à cette dernière le titre de logique au sens strict. [Granger 2001, 59]

Or, assurer la neutralité ontologique de la logique, cela signifie, pour Granger, éviter une refonte totale de la structuration la plus primitive de l'objet, celle de l'objet *überhaupt*[4] organisé par la logique classique. Les propriétés logiques, nous dit-il, ne s'appliquent pas directement aux objets de la connaissance et la logique ne parle pas de la forme des contenus d'objets mais de la « forme de cette forme ». La réforme de la pensée des objets, exigée par les développements de la physique quantique, « se situe-t-elle bien encore au niveau d'une logique, au sens strict où nous l'avons entendu de théorie de l'"objectivité" en général ? » [Granger 1994, 83] se demande Granger. Son critère de logicité est donc doublement préconçu pour :

4. C'est-à-dire l'« objet quelconque », expression que Granger dit reprendre de Gonseth [Granger 1994, 84].

- Donner droit au progrès de la physique et à la nécessité de concevoir une nouvelle catégorie d'objets à l'échelle quantique.
- Éviter dans le même temps la révision de la logique classique, donc des règles opératoires les plus générales de la pensée.

D'un point de vue philosophique, cela signifie que :

- Granger accepte le *pluralisme épistémologique* qui conçoit notre représentation du monde sur la base de systèmes scientifiques, révisables, évolutifs et relatifs à plusieurs référentiels. Il refuse en contrepartie le *pluralisme logique*, du moins implicitement, puisque seule la logique classique est posée comme un référentiel invariable et absolu. Réinterprétant la question posée par Quine en ces termes : le référentiel constitué par la logique peut-il être lui-même révisé ? Granger répond par la négative, car, dit-il, « il constitue un véritable méta-référentiel déterminant la notion d'objet en général, ce sont les référentiels particuliers aux différentes sciences de l'empirie qui caractérisent leurs objets propres et sont révisables » [Granger 1997, 147].
- Granger veut assurer *l'unité* de la logique en partant d'un critère non-fondé de son *unicité*. Lorsqu'il insiste sur le méta-règne de la logique classique à tous les niveaux des théories logiques, allant des plus simples aux plus complexes, du calcul des prédicats aux nouvelles logiques quantiques, il les réduit toutes à des théories qui ne jouissent pas selon lui d'un statut strictement logique : la logique modale n'est une logique « que par un abus de langage » [Granger 2001, 64] ; la logique intuitionniste n'est « qu'une variante d'exposition de la logique pure classique » [Granger 1994, 78] ; le calcul des prédicats est plutôt mathématique que logique ; quant aux logiques quantiques, elles sont plutôt physiques[5] que logiques. Considérer ces systèmes logiques comme des théories pleinement logiques, cela reviendrait en somme à ignorer « les frontières entre l'apophantique pure et simple et les théories d'objets » [Granger 1979, 67].
- Granger entend asseoir la connaissance sur des principes non pas empiriques ni métaphysiques, mais sur des principes formels purement syntaxiques. L'idée structuraliste essentielle qu'il défend est la suivante : l'objet de la connaissance, quel que soit son niveau de complexité, n'est ni un objet de perception ni un *être* isolé, mais un élément formel intégrable dans une structuration logique primitive. Cette structuration, purement syntaxique, n'organise pas directement la forme de l'objet,

5. Dans « La logique est-elle une théorie des objets en général », Granger affirme que « toutes les propriétés attribuées aux énoncés de la nouvelle logique ne sont rien d'autre que les propriétés des *représentations des nouveaux objets*. Il s'agit donc non plus même d'une « physique de l'objet *quelconque* » au sens de Gonseth, mais d'une proto-physique en un sens fort » [Granger 1994, 84].

> mais gouverne la manière la plus générale de le décrire. La connaissance se trouve ainsi réduite à son aspect formaliste, aspect qui écarte toute tentative d'interprétation métaphysique des structures [Granger 1960, 37]. Comme on peut le lire dans *La Vérification* : « La science accède au réel, en tant qu'elle parvient à intégrer l'expérience dans un système logiquement organisé décrivant le monde. Il n'y a point de monde *par-delà* celui-ci [...], seule est scientifique une connaissance vérifiable, et seule est vérifiable une connaissance structurale [...]. » [Granger 1971, 27].

Mais plus que le plan des conceptions philosophiques adoptées, c'est surtout celui de la stratégie mise en place qui pose un véritable problème chez l'épistémologue français. Un critère logique ne peut en effet servir d'appui à un arrière-plan philosophique, que lorsqu'il est techniquement fondé, autrement dit, justifié. Or, en plaçant la philosophie au premier plan, Granger fait en sorte que son critère soit principalement justifié par des prises de positions philosophiques, alors que c'est l'inverse qui devrait se produire : sans parler des présupposés philosophiques qu'on a évoqués plus haut, faut-il rappeler ici que Granger lui-même considère les concepts de « contenu formel » et de « dualité », concepts fondamentaux de son critère, comme « des concepts *philosophiques*, et non des concepts appartenant à la science même » [Granger 1987, 210] ? Cette démarche qu'il adopte risque à notre avis non seulement d'affaiblir ses positions, mais également de laisser dans l'imprécision bon nombre de questions sur la validité technique de son critère.

4 L'aspect proprement technique

Commençons par le cas particulier des logiques modales. Parmi celles-ci, certaines possèdent, au même titre que la logique propositionnelle, les trois propriétés méta-logiques. Elles sont non-contradictoires, décidables et complètes. Mais à regarder le critère de Granger, on remarque qu'il justifie la transparence du calcul propositionnel par la coexistence de ces propriétés et qu'il rapporte, par conséquent, l'apparition des contenus formels à la perte de la décidabilité. On ne comprend pas alors pourquoi les logiques modales échapperaient à ce critère. Pourquoi leurs propriétés méta-logiques ne garantiraient-elles pas leur transparence et l'absence de contenus formels[6] ? Pourquoi ne mériteraient-elles pas le nom de logique, s'il est bien vrai que ne sont « strictement logiques que les théories à la fois complètes et décidables » [Granger 1979, 66] ?

En présence de cette première difficulté, on se voit contraint de modifier le point de vue de Granger et d'adopter l'une des deux alternatives suivantes :

6. Soulignons que pour Granger, puisque les logiques modales « peuvent manifester des contenus formels à différents niveaux de richesse et de complexité, c'est parmi les disciplines mathématiques et non parmi les logiques qu'il faut les classer » [Granger 1994, 77].

a) Soit on admet que les propriétés méta-logiques ne sont pas garantes de la transparence de la logique propositionnelle.

b) Soit on considère que cette logique elle-même n'est pas transparente.

L'une comme l'autre porte préjudice à la conception grangérienne. Le contre-exemple des logiques modales justifie la première possibilité (a). Mais plus plausible est encore la deuxième (b), d'autant que Quine semble la valider dans *Methods of Logic* lorsqu'il étudie le problème de la simplification des schémas vérificationnels. Ce problème nous montre que l'activité logique, au niveau du calcul des énoncés, ne peut pas toujours s'effectuer en des formulations transparentes et intuitives, c'est-à-dire, contrôlables en un nombre limité de pas. Expliquons le problème quinien en question.

Partant d'un schéma normal disjonctif, la technique de simplification suppose qu'on puisse le réduire à ses impliquants primitifs pour choisir ensuite parmi ceux-ci les combinaisons qui impliquent le reste du schéma. Une fois les bonnes combinaisons trouvées, on les supprime du schéma original, le réduisant de la sorte à un de ses équivalents le plus bref. Soit le schéma normal disjonctif :

$$(\neg p \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg s \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg s \wedge q \wedge p) \vee (\neg r \wedge p \wedge s). \quad (1)$$

Nous commençons par le débarrasser de ses éléments redondants figurant dans la troisième conjonction :

$$(\neg p \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg s \wedge q) \vee (\neg s \wedge q \wedge p) \vee (\neg r \wedge p \wedge s). \quad (2)$$

Nous appliquons ensuite la règle qui simplifie « $p \vee (p \wedge q)$ en p » à la disjonction « $(\neg s \wedge q) \vee (\neg s \wedge q \wedge p)$ ». Nous obtenons :

$$(\neg p \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg s \wedge q) \vee (\neg r \wedge p \wedge s). \quad (3)$$

Nous devons trouver maintenant lequel de ces constituants implique le reste du schéma. On peut utiliser la table de vérité et vérifier, pour tous les disjoints, si les valeurs des deux schémas qu'on suppose équivalents concordent. Mais cette méthode est longue et complexe : le schéma en question comporte quatre éléments littéraux, donc seize cas de vérité et de fausseté. Quine nous propose une technique plus économe qu'il appelle « l'attaque sélective ». Cette technique consiste à tester l'implication en remplaçant les lettres du schéma par « T » pour le vrai et « $\perp$ » pour le faux. Pour vérifier si un schéma $S1$ implique $S2$, nous remplaçons p, q, etc., dans $S1$ par les valeurs qui entraînent la fausseté de $S2$. Si on obtient « $\perp$ » en résolvant $S1$, alors $S1$ implique $S2$. Partant de la fausseté de $S2$, l'implication ne peut échouer, en effet, que par la vérité de $S1$. De façon plus directe, on peut aussi remplacer p, q, etc., dans $S2$ par les valeurs qui entraînent la vérité de $S1$. Si on obtient « T » en résolvant $S2$, alors $S1$ implique $S2$. Commençons par la première combinaison :

$$(\neg p \wedge \neg s). \quad (4)$$

La seule interprétation qui la rend vraie est celle où p est « $\perp$ » et s est « $\perp$ ». Vérifions si elle implique le reste du schéma (5) $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg s \wedge q) \vee (\neg r \wedge p \wedge s)$. En remplaçant dans (5) les valeurs données à p et s, on obtient :

$$(\neg p \ \wedge \ \neg q) \vee \ (\neg s \wedge \ q) \vee \ (\neg r \ \wedge \ p \ \wedge \ s). \tag{5}$$

$$(\neg \perp \wedge \neg q) \vee \ (\neg \perp \wedge \ q) \vee \ (\neg r \wedge \ \perp \wedge \perp). \tag{6}$$

$$(T \wedge \neg q) \vee (T \wedge q) \vee \perp . \tag{7}$$

$$\neg q \vee q. \tag{8}$$

$$T. \tag{9}$$

On conclut que (4) implique (5). Donc notre schéma de départ (1) admet une nouvelle simplification qui le réduit à (4).

Que faut-il retenir de cet exemple ? En deux mots, la réduction d'un schéma à ses impliquants primitifs est loin d'être une procédure *transparente*. Quoique vraisemblablement finie, elle est loin d'être « explicite » ou directement effectuable par une « procédure canonique », propriétés que Granger attribue pourtant au domaine de la logique pure [Granger 1987, 203]. Il est vrai que la technique de l'attaque sélective permet de calculer sur des signes et de réduire ainsi la simplification à un nombre limité d'opérations. Mais cette technique, comme le reconnaît Quine, nécessite un examen complet des impliquants primitifs si l'on veut être sûr d'avoir trouvé l'équivalent le plus bref du schéma à simplifier. Elle suppose que soit préalablement établis un grand nombre de schémas basiques de simplification qu'on pourra appliquer directement à des schémas plus complexes, tel le schéma basique qui nous a permis de passer de (2) à (3) dans notre exemple. Elle s'avère finalement d'une grande difficulté technique pour les schémas comprenant six lettres et plus. Quine cite l'exemple de Fridshal qui a travaillé sur un schéma de neufs lettres ayant 1 698 impliquants primitifs. Recourir à des algorithmes exhaustifs n'a donc pour conséquence que de décrédibiliser l'efficacité d'une logique souvent privilégiée pour sa simplicité.

Le seul ennui est qu'on ne trouve pas dans les écrits de Granger une définition explicite de la notion de transparence. Renvoie-t-elle à une transparence d'ordre technique ou est-elle une simple allusion à un objet dépouillé de toutes ses qualités ? Quel que soit le parti pris sur cette question, nous pensons que l'idée mise en cause par Quine rend caduque et la notion de transparence-lorsqu'elle est prise au premier sens (technique) – et la notion de décidabilité – quand bien même la transparence serait entendue en son sens second. En effet, Granger dit qu'en calcul des propositions, l'algorithme de décision doit être « évidemment fourni par les tables de vérité » [Granger 2001, note 1, 104]. Cependant, le problème de la simplification des schémas vérificationnels montre que lorsque ceux-ci sont exhaustifs en lettres propositionnelles, ils atteignent un niveau de complexité important, pour être simplement effectuables par le moyen des tables de vérité.

Dans le texte de 1989, Engel, lui aussi, nous met en garde contre l'imprécision du critère de décidabilité. Ainsi souligne-t-il que dans la théorie de la « complexité computationnelle », certains problèmes ont été recensés comme non-décidables par la méthode des tables de vérité. En ce sens, dit-il, « il n'est pas vrai que même le calcul des propositions soit décidable » [Engel 1989, 304]. Engel va encore plus loin. Il y a selon lui de bonnes raisons pour distinguer dans la décidabilité, une décidabilité « *en principe* » et une décidabilité « *en pratique* » [Engel 1989, 304]. La première devrait s'appliquer à des théories en général. La deuxième concernerait une classe de formules particulières que contiennent ces théories. On sait par exemple que la logique du premier ordre a été révélée par Church (1936) comme une logique non-décidable. Pourtant, il existe des procédures qui établissent la décidabilité de certaines formules de cette logique, notamment dans le cas du calcul des prédicats *monadiques*. Si l'on veut sauvegarder une définition universelle de la décidabilité, à savoir l'existence d'une procédure effective, rien ne doit s'opposer à ce que l'on considère les formules du calcul des prédicats monadiques comme des « propositions de la logique » [Engel 1989, 304]. Engel en conclut :

> En l'absence d'un critère formel bien établi à l'appui de la position de Granger, la seule marque distinctive du logique comme tel demeure la disparition des objets et de l'ontologie, ou le fait que les objets formels du calcul propositionnel soient « sans couleur ». [Engel 1989, 304]

5 Le problème sémantique

Pour bien montrer encore la complexité de la conception de Granger, prenons le problème sémantique qui, paraît-il, nous entraîne dans des difficultés philosophiques non pas moins importantes que les difficultés techniques. Dans son article postérieur de 1995, Engel pense que Granger assimile deux questions :

> [...] celle, d'une part, de la signification des énoncés logiques, et celle, d'autre part, de la nature des « objets » sur lesquelles elles portent [*sic*], c'est-à-dire de leur portée ontologique. La première concerne la manière dont nous comprenons ces énoncés, la seconde concerne la « réalité » qu'ils sont supposés décrire. [Engel 1995, 129]

Or, poursuit Engel, il s'agit là de deux questions indépendantes qui ne doivent pas s'impliquer mutuellement. On peut par exemple défendre l'idée qu'il existe des objets logiques (réalisme ontologique) et soutenir en même temps que la vérité des énoncés est indépendante de la manière dont nous pouvons les vérifier (réalisme sémantique). C'est la thèse défendue en particulier par Frege. On peut aussi adopter une ontologie réaliste des objets logiques, mais nier que les énoncés aient un sens en dehors de leurs conditions d'assertion (antiréalisme sémantique). Tel est selon Engel le cas de C. Wright [Engel 1995, 129]. On peut encore soutenir un réalisme ontologique intra-théorique des objets, comme le fait Quine, et rejeter l'idée qu'il y ait une signification déterminée des énoncés théoriques, ceux-ci ne pouvant être étudiés en dehors de schèmes conceptuels déterminés.

La critique qu'Engel adresse à Granger n'est pas fausse, certes, mais nous semble partielle, mieux encore, incompatible avec la pensée grangérienne. Car, d'abord, la question de la *signification* n'est jamais considérée par Granger comme une question qui concerne la logique, mais la réflexion philosophique. La signification renvoie chez lui à un élément résiduel qui naîtrait comme une imperfection de la structure. Autrement dit, elle se produirait chaque fois qu'un élément échappe à l'activité de structuration scientifique. La différence entre la science et la philosophie serait donc telle que si la première construit des structures explicites et closes, la seconde, c'est-à-dire la philosophie, interprète des significations vagues et ouvertes[7]. Ensuite, Granger dit qu'en logique il y a « une adéquation du sémantique au syntaxique » [Granger 2001, 92] et ce n'est qu'au niveau des mathématiques que la sémantique « prend une vie propre et se détache de la syntaxe » [Granger 1991, 153]. Cela se justifie chez lui par l'identification qu'il établit entre l'apparition des contenus formels – produits de la dualité de l'objet et de l'opération en mathématiques – et l'acte même de signifier[8]. L'absence de ces contenus en logique explique par conséquent l'absence de la question sémantique. Enfin, Granger n'assimile nullement la question sémantique et la question ontologique comme le prétend Engel, mais il a l'intention de les neutraliser conjointement, et ce en s'inspirant de la théorie de l'information de Shannon. C'est ce que confirme un passage de *Langages et épistémologie* où Granger énonce ceci :

> [...] le point de vue informationnel consiste à n'envisager seulement que la *forme*, ou si l'on veut la virtualité, d'un contenu d'information véhiculé par un symbolisme, sans qu'aucune hypothèse soit faite sur l'existence ou la nature des références effectives des symboles. Comme le dit clairement Shannon ([49], p. 3) : « Fréquemment, les messages ont des sens « *meanings* » c'est-à-dire qu'ils renvoient à – ou sont en corrélation réglée avec – certaines entités conceptuelles ou physiques. Les aspects sémantiques

7. Les deux ouvrages *Essai d'une philosophie du style* [Granger 1968, chap. V] et *Pour la connaissance philosophique* [Granger 1988] constituent des références majeures pour approfondir la question grangérienne des significations.

8. Dans La notion de contenu formel, Granger affirme que « la distinction des deux termes (objet et opération) s'identifie à l'acte fondamental et primitif de signification » [Granger 1982, 34].

> de la communication ne concernent pas le problème que traite ici l'ingénieur ». Ce point de vue vide la fonction référentielle de son contenu, tout en conservant les conditions de réalisation et la forme. Il est donc bien légitime, indépendamment de toute hypothèse ontologique sur les objets mathématiques, d'appliquer cette analyse aux systèmes formels en tant que simples squelettes de productions sémantiques. [Granger 1979, 49]

Il est bien connu que la théorie de Shannon ne fait aucune place à la dimension sémantique de l'information. Le concept d'information, concept mathématique, n'est pas évalué en termes de sens, mais uniquement en termes de quantité d'information transmise dans un signal. Plus les signes contenus dans le message sont nombreux, plus la quantité d'information reçue est grande. Si l'on applique maintenant cette théorie au calcul propositionnel, calcul binaire très pauvre en signes, l'information, dit Granger, devrait comporter un message exprimant seulement le vrai et le faux. Les signes « logiques » peuvent être multipliés ici autant de fois que l'on voudra sans que cela ait un impact sur la quantité d'information, puisque celle-ci ne fait que réitérer deux valeurs de vérité. Une proposition telle qu'une implication serait interprétée de ce point de vue en tant qu'un énoncé décrivant quatre possibilités virtuelles de *coprésences d'objets*[9] : seule est rejetée la combinaison qui pose la présence d'un premier objet avec l'absence du second, les trois autres combinaisons étant alors acceptées. Le symbolisme logique, symbolisme parfaitement gouverné par des règles de syntaxe, réduit en effet les possibilités combinatoires des signes tout en dissipant l'*incertitude* de notre attente. L'information qu'il véhicule ne peut être en fin de compte que *redondante*, puisqu'il s'agit d'une information entièrement syntaxique.

> Le fonctionnement des règles syntaxiques au sens large est, de ce point de vue, comparable à la répétition de certains signes dans un message téléphoné [...]. On dit qu'un langage syntaxiquement structuré possède de ce fait une *redondance*, concept que la théorie des communications permet naturellement de quantifier à partir de la notion d'information, et qui caractérise, non plus un message particulier, mais un langage en général [...]. [Granger 1960, 36]

De là, on comprend la notion de « sémantique formelle » [Granger 1971, 120] que Granger introduit pour désigner le mode de renvoi des « objets quelconques » de la logique. Ces objets n'ont pas de références effectives et interviennent dans le calcul comme des places vides, plus explicitement, comme des « symboles renvoyant aux règles de combinaison qu'explicitent les axiomatiques » [Granger 1971, 120]. Ils sont pourtant porteurs d'un sens, mais

9. Notons, sans s'attarder sur un point qui n'entre pas dans notre propos, que Granger défend une thèse très problématique selon laquelle les objets logiques sont les propositions. Nous renvoyons le lecteur désireux d'en savoir plus aux articles [Granger 1996, 2005].

d'un « sens syntaxique » renvoyant aux règles structurales qui les concernent en tant que signes. Il importe de souligner ici que le sens n'est pas chez Granger synonyme de signification : le sens, dit-il, renvoie à l'ensemble des lois formelles qui définissent l'objet structuré, contrairement à la signification qui échapperait à ces lois. Si donc l'objet de la logique propositionnelle a un sens, il ne peut avoir une signification. Ceci s'explique naturellement par la transparence du calcul propositionnel, calcul où l'objet est complètement réductible à des procédures opératoires. En ces termes, Granger énonce dans *Essai d'une philosophie du style* de 1968 que :

> Si une sémantique peut exister, elle doit nous éclairer sur le découpage des unités de sens de la langue, et non sur le système des contenus significatifs. [Granger 1968, 128]

Le recours à la théorie de l'information appelle encore quelques remarques qui nous paraissent substantielles. On sait que l'information est pour Shannon une grandeur mesurable et observable. Elle n'est donc pas seulement mathématique, mais jouit aussi d'un statut physique. Lorsque Granger considère l'objet logique comme ce qui est « posé » ou « présent[10] » et dit explicitement que sa mise en forme « coïncide avec l'usage même de symboles » [Granger 1982, 35], on pourrait croire qu'il défend une conception physique de l'objet logique. Dans ce cas, l'objet logique se confondrait avec son signe graphique, son signe écrit. Une telle lecture ne nous paraît pas erronée d'autant que Granger revient fréquemment sur le caractère essentiellement graphique de la pensée symbolique, que cette pensée soit logique ou scientifique. Mais si l'on ne voyait dans le symbolisme logique que ce simple aspect artificiel, ce serait, nous pensons, se méprendre sur la pensée véritable de Granger. Un passage dans *Sciences et Réalité*, nous le prouve parfaitement :

> [...] les marques écrites sur la machine de Turing ne sont certes, pour elle, que des indices mécaniques pour déclencher des mouvements préétablis ; mais ils sont pour l'esprit humain, qui pose les questions et comprend les réponses, des *symboles*. [Granger 2001, 77]

Nous pouvons, en un sens, réconcilier cette affirmation avec la proposition 3.11 du *Tractatus* :

> 3.11- Nous usons du signe sensible[11] (sonore ou écrit, etc.) de la proposition comme projection de la situation possible.
> La méthode de projection est la pensée du sens de la proposition. [Wittgenstein 1993, 41]

10. Granger dit qu'au niveau de la logique élémentaire « n'entre en jeu que la dichotomie dite « de présence et d'absence » du point de vue des objets, « du vrai et du faux » du point de vue des actes de pensée », [Granger 2001, 50].

11. Granger se contente ici de traduire l'expression allemande composée « das sinnlich Wahrnehmbare » par le mot « sensible ». Plus précis dans la proposition 3.32, il la traduit par « perceptible aux sens ».

Et la proposition 3.32 où Wittgenstein distingue les signes et les symboles.

> 3.32- Le signe est ce qui est perceptible aux sens dans le symbole. [Wittgenstein 1993, 46]

Rappelons encore que le fonctionnement de la logique se place chez Granger à un méta-niveau relativement au niveau de la construction effective des objets. Par rapport au langage, à la science et à l'expérience, la logique est un méta-langage qui décrit les propriétés formelles des objets en général, et ce indépendamment de leurs réalisations effectives[12]. La logique, dit Granger, se dédouble en acte et en objet, puisqu'en elle se trouve posés à la fois un langage syntaxique qui exprime la structure de tout discours portant sur les objets et un « langage thématisé » [Granger 1960, 54] qui se réfléchit sur lui-même. Si le premier peut être transcrit dans une machine qui le réduit à son aspect d'automatisme, le second est d'un ordre « décisionnel » transcendant la seule structure syntaxique [Granger 1960, 60].

> Il est clair (cependant) que l'acte de calculer pour un sujet pensant comporte des aspects non mécaniques, peut-être vicariants ou secondaires, mais qui contribuent assurément à donner un sens à la procédure. [...] les calculs logiques soulèvent des questions qu'on peut appeler « *méta-logiques* », concernant le fondement et les limitations de leur validité [...]. À ces environnements du calcul qui, d'une certaine manière le débordent, nous avons donné le nom de « *pensée* ». [Granger 2001, 76–77]

La formation du symbolisme logique apparaît donc comme le produit d'un processus informationnel, processus qui ne se détache pas complètement de l'activité de construction du sujet. Mais cette activité, il faut le dire, est tout au plus *stratégique*. Elle intervient uniquement au niveau du *choix* des opérations et de leur ordre, sans qu'elle ait la moindre prise sur la validité du calcul et son résultat [Granger 2001, 76]. C'est dans ce sens très restreint qu'elle est qualifiée de *décisionnelle*.

Or, il est important de constater que, Granger va s'autoriserde cette activité minime du sujet, pour réduire le concept d'information à celui de vérité : ce qui est présent ou absent du point de vue des objets est vrai ou

12. Que Wittgenstein ait condamné l'usage méta-linguistique du langage comme discours absolument dépourvu de sens, constitue aux yeux de Granger une position « hypercritique », « décevant(e) » et « scandaleuse ». Cette attitude résolument critique vis-à-vis de Wittgenstein est pourtant plus nuancée dans d'autres textes. Dans *Pour la connaissance philosophique* par exemple, Granger dit qu'il y aurait un sens profond dans le refus wittgensteinien d'un niveau « méta » en philosophie, pourvu que l'on entende par là qu'une philosophie de la philosophie reste toujours une philosophie. Elle n'engendre ni une nouvelle philosophie, ni une nouvelle science. En ce sens, Granger écrit : « L'opérateur “philosopher”, pareil à ces opérateurs *idempotents* de l'algèbre, autant de fois que l'on voudra réitéré [*sic*], ne produit rien de nouveau que lui-même » [Granger 1988, 10].

faux du point de vue des actes de pensée. L'énoncé propositionnel, vérifiable par rapport à sa valeur de vérité, se trouve ainsi confondu avec un contenu informationnel qui, au sens de Shannon, est analysable statistiquement en termes de probabilité. On glisse d'une théorie fondée sur la notion d'incertitude à une théorie qui se veut fondatrice de vérité. Ce glissement est-il judicieux ? Il pouvait l'être si, au niveau de la logique, l'information était conçue dans son usage sémantique présupposant la théorie du sens. Il pouvait l'être aussi, si la vérité logique était susceptible de révision, au même titre que les vérités scientifiques. Mais on sait que tel n'est pas le cas chez Granger. Pourrait-on alors renvoyer dos à dos la sémantique et l'ontologie et contester, de surcroît, le révisionnisme logique ?

6 Conclusion

Les problèmes et difficultés techniques que nous avons tenté de souligner ici interdisent de considérer la conception de Granger comme un véritable critère de logicité. Plus intéressante serait la première hypothèse adoptée par Engel dans son texte antérieur de 1989, où il la qualifiait de « critère des degrés du formel ». Après tout, il faut bien, croyons-nous, si nous voulons sauver la notion de contenu formel, renoncer à une interprétation strictement technique. Les critiques que nous avons formulées ici reviennent sans doute à regretter cet aspect vulnérable de la notion grangérienne, mais montrent dans le même temps la nécessité de la concevoir dans une acception moins rigide. Nous avons vu que dans la logique propositionnelle, le contenu n'est que l'envers de la forme, c'est-à-dire, l'équivalent des règles formelles qui constituent le système opératoire. Quoiqu'à son degré zéro à ce niveau élémentaire, le contenu formel paraît mettre le mieux en lumière l'autonomie de la pensée formelle. D'une part, l'idée que les propositions logiques ont un contenu permet d'échapper à une conception tautologique qui les réduirait à des formes vides ou à des conventions langagières. D'autre part, l'idée que ce contenu soit formel et non sensible permet d'éviter des formes affirmées de l'empirisme[13], aussi bien que ses formes contemporaines plus atténuées qu'on retrouve chez Russell, Carnap ou encore Quine.

Au niveau des mathématiques, les contenus formels ont selon Granger une toute autre portée. Leur présence se traduit d'abord par des contraintes empêchant la réduction des propriétés formelles des objets à des procédures de démonstration. La dualité entre le système des objets et celui des opérations ne fonctionne plus dans un double sens de réciprocité, soit à cause d'un système opératoire trop restrictif, soit, au contraire, à cause d'un système opératoire trop libéral. Il est clair cependant que si ces obstacles avaient été

13. Telle la doctrine de Stuart Mill ou encore, de façon plus nette, l'épicurisme pour lesquels la logique est une transcription dans le langage des lois matérielles de la chose.

insurmontables, les mathématiques n'auraient eu aucun moyen de subsister. Lorsque l'opératoire et l'objectal atteignent des degrés de décalage important, ils conduisent souvent à une extension très riche du corps opératoire primitif. La notion de nombre naturel nous offre ici le plus bel exemple. La nécessité de généraliser certaines opérations a conduit à plusieurs extensions de cette notion primitive : c'est ainsi qu'on a adjoint aux nombres naturels les nombres entiers relatifs, aux nombres entiers relatifs les nombres rationnels, aux nombres rationnels les nombres réels. Et c'est ce même besoin d'extension de la notion de nombre qui a conduit à adjoindre aux nombres réels les nombres dits complexes.

Le cas des mathématiques est propre à montrer l'importance cruciale que Granger accorde à sa notion de contenu formel. Si l'on admet avec lui qu'elle n'est pas une notion purement technique, cela pourra atténuer les exigences de rigueur et de pertinence qu'on lui réclame, mais ne résout pas pour autant tout le problème. Peut-être faudrait-il conclure avec Vuillemin dans son article « Sur la dualité[14] », que

> [...] les concepts de contenu formel et de dualité de l'objet et de l'opération tiennent une place fondamentale en théorie de la connaissance. Ces concepts sont aussi les plus difficiles à analyser, puisque c'est de leur opacité que naît leur fécondité. C'est ce que M. Granger a vu avec rigueur et précision, en philosophie. On ne s'étonnera donc pas de voir poser à leur propos les problèmes fondamentaux et probablement éternels de la philosophie. [Vuillemin 1987, 13]

Bibliographie

ENGEL, Pascal [1989], *La Norme du vrai. Philosophie de la logique*, Paris : Gallimard.

—— [1995], Il n'y a pas d'objets logiques, dans *La Connaissance philosophique : Essais sur l'œuvre de Gilles-Gaston Granger*, édité par J. Proust & E. Schwartz, Paris : PUF, 121–134.

GRANGER, Gilles-Gaston [1960], *Pensée formelle et sciences de l'homme*, Paris : Aubier-Montaigne, 2^{e} éd., 1967.

—— [1968], *Essai d'une philosophie du style*, Paris : Armand Colin, 2^{e} éd., 1987.

—— [1971], Langue et systèmes formels, *Langages*, 21, 71–87, repris dans *Philosophie, langage, science*, Les Ulis : EDP Sciences, 2003, 103–123.

14. L'article de Vuillemin est paru dans [Vuillemin 1987, vol. X], premier volume d'hommage à la pensée de Granger, publié au Brésil.

—— [1979], *Langages et épistémologie*, Paris : Klincksieck.

—— [1982], The notion of formal content, *Social Research*, 49(2 : Current French Philosophy), 359–382, paru également dans la « Postface » de la traduction anglaise de *Pensée formelle et sciences de l'homme (Formal Thought and Sciences of Man)*, Dordrecht : Reidel, 1980. Repris en français dans J. Vrin (éd.), Formes, opérations, objets, 1994, 33–52.

—— [1987], Contenus formels et dualité, *Manuscrito*, 10(2), 195–215, repris dans *Formes, opérations, objets*, 1994, Paris : Vrin, 53–70.

—— [1988], *Pour la connaissance philosophique*, Paris : Odile Jacob.

—— [1991], *Formes, opérations, objets*, Paris : Vrin, chap. « Le transcendantal et le formel en mathématiques », 149–156, 1994.

—— [1994], *Formes, opérations, objets*, Paris : Vrin, chap. « La logique est-elle une théorie des objets en général ? », 73–85, Conférence originale donnée en 1987 à l'université de Stockholm : « Is Logic a Theory of Object Überhaupt ? ».

—— [1996], La philosophie du langage dans les sciences exactes, dans *Philosophy of Language, an International Handbook of Contemporary Research*, édité par M. Dascal *et al.*, Berlin : de Gruyter, 1436–1454, repris dans *Philosophie, langage, science*, Les Ulis : EDP Sciences, 2003, 295–327.

—— [1997], Vérités mathématiques, vérités empiriques, dans *La Vérité*, édité par R. Quilliot, Paris : Ellipses, 144–149.

—— [2001], *Sciences et Réalité*, Paris : Odile Jacob.

—— [2005], Logique, mathématique, métamathématique, dans *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance, L'œuvre de Jules Vuillemin*, édité par R. Rashed & P. Pellegrin, Paris : Albert Blanchard, 205–213.

Vuillemin, Jules [1987], Sur la dualité, *Manuscrito*, 10(2), 9–13.

Wittgenstein, Ludwig [1993], *Tractatus logico-philosophicus*, Paris : Gallimard, texte original paru en 1921 ; traduction française par G.-G. Granger.